ОТВЕТЫ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Вариант 1

Задача 1.

Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{3}{7}$.

Ответ: 29/35

Найдите $f\left(\frac{7}{3}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{5}{3}$.

Ответ: 41/12

Найдите $f\left(\frac{3}{5}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{1-x} - \dfrac{5}{7}$.

Ответ: 11/14

Найдите $f\left(\frac{5}{3}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{4}{9}$.

Ответ: 37/18

Задача 2.

Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax-6=0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

Ответ: ± 1

Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax-10=0$ равна 7. Найдите все возможные значения a.

Ответ: ± 3

Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax+6=0$ равна 1. Найдите все возможные значения a.

Ответ: ± 5

Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax+10=0$ равна 3. Найдите все возможные значения a.

Ответ: ± 7

Задача 3.

Решите уравнение $2\cos^2 x + 3\sin 2x = 4 + 3\cos 2x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \operatorname{arctg} 5 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Решите уравнение $8\cos^2 x + \sin 2x = 3 + 2\cos 2x$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \operatorname{arctg} 3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Решите уравнение $6\cos^2 x + 3\cos 2x = 5\sin 2x - 2$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ -\operatorname{arctg} 11 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Решите уравнение $2\cos 2x + 3\sin 2x + 4\cos^2 x = -1$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \operatorname{arctg} 7 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Задача 4.

Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}(1+\log_x^2 3) \leqslant 1$.

Ответ: $x \in (0, \frac{1}{3}] \cup (1, 3)$

Решите неравенство $\log_{1-\log_x 2}(1+\log_2^2 x) \leqslant 1$.

Ответ: $x \in [\frac{1}{2}, 1) \cup (2, \infty)$

Решите неравенство $\log_{1+\log_5 x}(1+\log_x^2 5) \leqslant 1$.

Ответ: $x \in (\frac{1}{5}, 1) \cup [5, \infty)$

Решите неравенство $\log_{1+\log_x 7}(1+\log_7^2 x) \leqslant 1$.

Ответ: $x \in (0, \frac{1}{7}) \cup (1, 7]$

Задача 5.

Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C. Найдите площадь четырёхугольника $TACB$, если известно, что $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5 : 8$.

Ответ: $8\sqrt{2}$

Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорда BC внешней окружности касается внутренней окружности в точке D. Прямая AD пересекает внешнюю окружность в точках A и E. Найдите BE, если известно, что $EC = CA$, площадь четырёхугольника $ABEC$ равна $3\sqrt{3}$, а радиусы окружностей относятся как $2 : 3$.

Ответ: 2

Две окружности касаются внутренним образом в точке S. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке T. Прямая ST пересекает внешнюю окружность в точках S и C. Найдите площадь четырёхугольника $SACB$, если известно, что $CA = 5$, $CB \| AS$, а радиусы окружностей относятся как $11 : 16$.

Ответ: 32

Две окружности касаются внутренним образом в точке P. Хорда QR внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая PS пересекает внешнюю окружность в точках P и T. Найдите QT, если известно, что $PQ \| RT$, площадь четырёхугольника $PQTR$ равна $5\sqrt{5}$, а радиусы окружностей относятся как $7 : 10$.

Ответ: 3

Задача 6.

Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

Ответ: В 12:00

Ровно в 10:00 из пункта А в пункт Б выехала маршрутка. Проехав треть пути, наблюдательный водитель маршрутки заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда маршрутка прибыла в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал грузовик. Когда до пункта А оставалось шестая часть пути, не менее наблюдательный водитель грузовика заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приехал грузовик в пункт А, если известно, что велосипедист прибыл в пункт А ровно в 15:00? Скорости велосипедиста, маршрутки и грузовика считать постоянными.

Ответ: В 13:00

Ровно в 11:00 из пункта А в пункт Б выехал велосипедист. Проехав две пятых пути, наблюдательный велосипедист заметил, что мимо него в сторону пункта А прошёл некий пешеход. В тот самый момент, когда велосипедист прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал мотоциклист. Когда до пункта А оставалось две седьмых пути, не менее наблюдательный мотоциклист заметил, что он поравнялся с тем самым пешеходом. Во сколько придёт пешеход в пункт А, если известно, что мотоциклист прибыл в пункт А ровно в 12:00? Скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста считать постоянными.

Ответ: В 13:30

Ровно в 13:00 из пункта А в пункт Б выехал мотоциклист. Проехав четверть пути, наблюдательный мотоциклист заметил, что мимо него в сторону пункта А прошёл некий пешеход. В тот самый момент, когда мотоциклист прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автомобиль. Когда до пункта А оставалось пятая часть пути, не менее наблюдательный водитель автомобиля заметил, что он поравнялся с тем самым пешеходом. Во сколько приехал автомобиль в пункт А, если известно, что пешеход прибыл в пункт А ровно в 17:00? Скорости пешехода, мотоцикла и автомобиля считать постоянными.

Ответ: В 14:00

Задача 7.

В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB, перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K, так что $BK : KC = 3 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS.

Ответ: $25\sqrt{2}$

В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 5. Плоскость π параллельна ребру KL, перпендикулярна плоскости NOV и пересекает ребро LM в точке T, так что $LT : TM = 3 : 2$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость LMV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани MNV.

Ответ: $4\sqrt{2}$

В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 20. Плоскость π параллельна ребру BC, перпендикулярна плоскости EFS и пересекает ребро CD в точке K, так что $CK : KD = 2 : 3$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости CDS и ABS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани DES.

Ответ: $49\sqrt{2}$

В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 10. Плоскость π параллельна ребру LM, перпендикулярна плоскости OPV и пересекает ребро MN в точке T, так что $MT : TN = 1 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость MNV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани NOV.

Ответ: $9\sqrt{2}$

Задача 8.

Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106+\log_a^2\cos ax+\log_a\cos^{10}ax}+\sqrt{58+\log_a^2\sin ax-\log_a\sin^6 ax}+\sqrt{5+\log_a^2\operatorname{tg}ax+\log_a\operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

Ответ: $9\sqrt{5}$, $a=2$, $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{13+\log_a^2\cos\frac{x}{a}+\log_a\cos^4\frac{x}{a}}+\sqrt{97+\log_a^2\sin\frac{x}{a}-\log_a\sin^8\frac{x}{a}}+\sqrt{20+\log_a^2\operatorname{tg}\frac{x}{a}+\log_a\operatorname{tg}^4\frac{x}{a}}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

Ответ: $8\sqrt{5}$, $a=2$, $x=\frac{\pi}{2}+4k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{157+\log_a^2\cos\frac{x}{a}-\log_a\cos^{12}\frac{x}{a}}+\sqrt{29+\log_a^2\sin\frac{x}{a}+\log_a\sin^4\frac{x}{a}}+\sqrt{47+\log_a^2\operatorname{tg}\frac{x}{a}-\log_a\operatorname{tg}^6\frac{x}{a}}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

Ответ: $11\sqrt{5}$, $a=1/2$, $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{65+\log_a^2\cos ax-\log_a\cos^8 ax}+\sqrt{10+\log_a^2\sin ax+\log_a\sin^2 ax}+\sqrt{125+\log_a^2\operatorname{tg}ax-\log_a\operatorname{tg}^{10}ax}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

Ответ: $10\sqrt{5}$, $a=1/2$, $x=\frac{\pi}{2}+4k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Вариант 2

1. Найдите $f\left(\dfrac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{3}{7}$.

Решение: $f\left(\dfrac{2}{7}\right) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{29}{35}$.

Ответ: 29/35

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 6 = 0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

Решение: Из условия следует, что $\sqrt{a^2+24} = 5$, откуда $a = \pm 1$.

Ответ: ± 1

3. Решите уравнение $2\cos^2 x + 3\sin 2x = 4 + 3\cos 2x$.

Решение: Воспользуемся формулами синуса и косинуса двойного угла и тождеством

$$4 = 4\cos^2 x + 4\sin^2 x.$$

Получим

$$\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 0,$$

что равносильно

$$\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 5 = 0.$$

Стало быть, $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = 5$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \operatorname{arctg} 5 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}(1 + \log_x^2 3) \leqslant 1$.

Решение: Положим $t = \log_3 x$. Тогда, поскольку

$$\log_{1-t}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \leqslant 1 \iff \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) - \ln(1-t)}{\ln(1-t)} \leqslant 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right) - (1-t)}{-t} \leqslant 0 \\ t < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1+t^3}{t^3} \geqslant 0 \\ t < 1 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} t \leqslant -1 \\ 0 < t < 1 \end{array}\right.,$$

исходное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x \leqslant -1 \\ 0 < \log_3 x < 1 \end{array}\right..$$

Стало быть,

$$\left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant \frac{1}{3} \\ 1 < x < 3 \end{array}\right..$$

Ответ: $x \in (0, \frac{1}{3}] \cup (1, 3)$

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C. Найдите площадь четырёхугольника $TACB$, если известно, что $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5:8$.

Решение: Обозначим через X и Y точки пересечения внутренней окружности с отрезками AT и BT соответственно. Поскольку при гомотетии с центром в точке T и коэффициентом $5/8$ внешняя окружность переходит во внутреннюю, то отрезок AB переходит в отрезок XY. Следовательно, $AB \| XY$, откуда

$$\frac{AX}{BY} = \frac{AT}{BT}.$$

Применяя теорему о касательной и секущей, получаем

$$\frac{AS^2}{BS^2} = \frac{AX \cdot AT}{BY \cdot BT} = \frac{AT^2}{BT^2},$$

то есть,

$$\frac{AS}{BS} = \frac{AT}{BT},$$

что в силу обратной теоремы о биссектрисе означает, что $\angle ATS = \angle BTS$. Но из равенства $CB = BT$ следует, что

$$\angle CTB = \angle TCB,$$

стало быть, $AT \| CB$, то есть четырёхугольник $TACB$ — трапеция, причём вписанная, то есть равнобокая. Значит, $AC = CB = BT = 3$.

Далее, треугольники ATS и BCS подобны с коэффициентом подобия $TS/CS = 5/(8-5) = 5/3$. Следовательно, $AT = 5$, а средняя линия трапеции $TACB$ равна 4. Высота же трапеции равна катету прямоугольного треугольника с гипотенузой 3 и другим катетом 1, то есть равна $2\sqrt{2}$. Таким образом, искомая площадь равна $4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Ответ: $8\sqrt{2}$

6. Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

Решение: Будем называть пунктом В точку, в которой автобус поравнялся с велосипедистом, и пунктом Г — точку, в которой велосипедист встретился с автомобилем. По условию пункт В делит путь от пункта А до пункта Б в отношении $2:3$. Обозначим через t_1 время, за которое автомобиль доехал от А до Б, и через t_2 — время, за которое автобус доехал от Б до А. Тогда автомобиль доехал от В до Б за $\frac{3}{5}t_1$, а автобус доехал от Б до В за $\frac{3}{5}t_2$. То есть, от момента, когда в пункте В появился автомобиль, до момента, когда в этой точке появился автобус, прошло $\frac{3}{5}(t_1 + t_2) = \frac{6}{5}$ часа. Заметим, что это же время равно сумме времени, за которое автомобиль доехал от пункта В до пункта Г, и времени, за которое велосипедист доехал от пункта Г до пункта В.

Стало быть, если обозначить через v_1 и v_2 соответственно скорости автомобиля и велосипедиста, через s_1 и s_2 — расстояния от пункта А до пунктов В и Г соответственно, и через t — время, прошедшее с момента отправления автомобиля из пункта А до момента приезда туда велосипедиста, то получим два соотношения:

$$\frac{6}{5} = \frac{s_2 - s_1}{v_1} + \frac{s_2 - s_1}{v_2} \qquad \text{и} \qquad t = \frac{s_2}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}.$$

Поделим первое равенство на второе и получим

$$\frac{6}{5t} = \frac{s_2 - s_1}{s_2} = 1 - \frac{\frac{2}{5}s}{\frac{2}{3}s} = \frac{2}{5},$$

где s — это расстояние от А до Б. Следовательно, $t = 3$ часа.

Ответ: В 12:00

7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB, перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K, так что $BK : KC = 3 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS.

Решение: Обозначим через P точку пересечения плоскости π с отрезком AF. Тогда K и P являются вершинами сечения, которое представляет из себя некоторый многоугольник $\mathcal{M}$. Этот многоугольник симметричен относительно плоскости, проходящей через середины рёбер AB и ED и через вершину S, поскольку относительно этой плоскости симметрична как пирамида, так и плоскость π. Следовательно, углы при вершинах K и P многоугольника $\mathcal{M}$ равны, и, стало быть, в силу условия параллельности равны 90°. Таким образом, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, равно как и их проекции на плоскость основания, перпендикулярны KP. Следовательно, π пересекает рёбра CS и FS, откуда видим, что S и ED лежат по разные стороны от π, то есть π пересекает и рёбра DS и ES. Таким образом, если обозначить через L, M, N и O точки пересечения плоскости π с рёбрами CS, DS, ES и FS соответственно, то треугольник LMS — тот самый треугольник, площадь которого нужно найти. Для этого достаточно найти площадь его ортогональной проекции на плоскость основания и угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью основания.

Обозначим через S', L', M', N' и O' проекции S, L, M, N и O на плоскость основания. Пусть X — точка пересечения прямых KP и CD, а Y — точка пересечения прямых KP и AD. Заметим, что M' лежит на прямой XL'.

Пусть a — длина ребра основания пирамиды и пусть $KC = b$. По условию $a = 14$, $b = 8$. Заметим, что

$$CL' = \frac{b}{2}, \quad S'L' = a - \frac{b}{2}, \quad YX = a + b.$$

Из подобия треугольников $XM'Y$ и $L'M'S'$ получаем

$$\frac{YM'}{S'M'} = \frac{YX}{S'L'} = \frac{a+b}{a - \frac{b}{2}},$$

откуда, учитывая, что $YM' = b + S'M'$, получаем

$$S'M' = \frac{2a - b}{3}.$$

Стало быть, площадь треугольника $L'M'S'$ равна

$$S'L' \cdot S'M' \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{(2a-b)^2\sqrt{3}}{24}.$$

Чтобы найти угол между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды, обозначим через Q и R середины отрезков KP и DE соответственно. Рассмотрим треугольник QRS. Пусть H — основание высоты, опущенной из вершины Q. Угол $\angle HQR$ — искомый. Из подобия прямоугольных треугольников HQR и $S'SR$ следует, что

$$\frac{SR}{QR} = \frac{S'R}{HR}.$$

Учитывая, что $QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot YD = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$, $S'R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, а также, что

$$\frac{HR}{SR} = \frac{MD}{SD} = \frac{M'D}{S'D} = \frac{a - S'M'}{a} = \frac{a+b}{3a},$$

получаем

$$\frac{SR}{\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a+b}{3a} \cdot SR},$$

откуда $SR = \frac{3}{2}a$.

Таким образом, $\sin\angle HQR = \sin\angle S'SR = S'R/SR = \sqrt{1/3}$, то есть, $\cos\angle HQR = \sqrt{2/3}$. Стало быть, искомая величина — площадь треугольника LMS — равна

$$\frac{(2a-b)^2\sqrt{3}}{24} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{(2a-b)^2\sqrt{2}}{16} = \frac{20^2\sqrt{2}}{16} = 25\sqrt{2}.$$

Ответ: $25\sqrt{2}$

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106 + \log_a^2 \cos ax + \log_a \cos^{10} ax} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin ax - \log_a \sin^6 ax} + \sqrt{5 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax + \log_a \operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a, x), при которых оно достигается.

Решение: Данное выражение можно переписать как

$$\sqrt{9^2 + (5 + \log_a \cos ax)^2} + \sqrt{7^2 + (3 - \log_a \sin ax)^2} + \sqrt{2^2 + (1 + \log_a \operatorname{tg} ax)^2}.$$

Заметим, что $(5 + \log_a \cos ax) + (3 - \log_a \sin ax) + (1 + \log_a \operatorname{tg} ax) = 9$, тогда как $9 + 7 + 2 = 18$. Следовательно, исходное выражение не меньше, чем расстояние от точки на плоскости с координатами $(0, 0)$ до точки с координатами $(18, 9)$. Причём достигается это расстояние тогда и только тогда, когда все три точки

$$(9,\ 5 + \log_a \cos ax), \quad (7,\ 3 - \log_a \sin ax), \quad (2,\ 1 + \log_a \operatorname{tg} ax)$$

лежат на этой прямой. То есть, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 5 + \log_a \cos ax = 9/2 \\ 3 - \log_a \sin ax = 7/2 \\ 1 + \log_a \operatorname{tg} ax = 1 \end{cases},$$

что равносильно условию $\sin ax = \cos ax = a^{-1/2}$. В силу основного тригонометрического тождества это возможно только тогда, когда $a = 2$. В этом случае минимум достигается при $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, и равен $\sqrt{18^2 + 9^2} = 9\sqrt{5}$.

Ответ: $9\sqrt{5}$, $a = 2$, $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$