ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАНИЙ, ПРЕДЛАГАВШИХСЯ НА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЯХ В МГУ В 2015 ГОДУ
МАТЕМАТИКА

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ

1. Найдите $f(2)$, если $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{10}$.

Решение: $f(2) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{10} = 2$.

Ответ: 2

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.

Решение: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 49 - 10 = 39$. Можно и в явном виде найти корни, возвести в квадрат и сложить.

Ответ: 39

3. Решите неравенство $\cos x + \sqrt{2}\cos 2x - \sin x \geqslant 0$.

Решение: Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned}\cos x + \sqrt{2}\cos 2x - \sin x &= \\ &= (\cos x - \sin x)(1 + \sqrt{2}(\cos x + \sin x)) = \\ &= 2\sqrt{2}\cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) + \tfrac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.,$$

которая равносильна соотношению $x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{5\pi}{12} + 2n\pi, \frac{\pi}{4} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

4. Решите уравнение $\log_x |2x^2 - 3| = 4\log_{|2x^2-3|} x$.

Решение: ОДЗ для x: $x > 0, x \neq 1, \sqrt{\frac{3}{2}}$. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, x \neq 1, \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \left[\begin{array}{l} |2x^2 - 3| = x^2 \\ |2x^2 - 3| = x^{-2} \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, x \neq 1, \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 3 = 0 \\ 3x^2 - 3 = 0 \\ 2x^4 - 3x^2 - 1 = 0 \\ 2x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$$

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$

5. Окружность радиуса $3/2$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E, так что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться AC, если $\angle BAC = 30°$?

Решение: Обозначим окружность из условия через Ω. Положим $b = AC$, $\gamma = \angle ACB$, $\alpha = \angle BAC (= 30°)$, $k = DE/EB (= 2)$.

Центр Ω равноудалён от точек A, B, C, следовательно он совпадает с центром описанной около треугольника ABC окружности. Пусть F — середина отрезка BC, а O — центр Ω. Тогда $OF = r$ — радиус Ω, $OB = R$ — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle OFB = 90°$, $\angle BOF = \alpha$. Стало быть, по теореме синусов

$$b = 2R\sin(\alpha+\gamma) = \frac{2r}{\cos\alpha}\sin(\alpha+\gamma) = 2r(\operatorname{tg}\alpha\cos\gamma + \sin\gamma).$$

По той же теореме синусов и по теореме о касательной и секущей

$$\sin\gamma = \frac{AB}{BC}\sin\alpha = \frac{k+2}{2}\cdot\frac{BE}{BF}\sin\alpha = \frac{k+2}{2\sqrt{k+1}}\sqrt{\frac{BE\cdot BD}{BF^2}}\sin\alpha = \frac{k+2}{2\sqrt{k+1}}\sin\alpha,$$

то есть для $k=2$, $\alpha = 30°$

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

и

$$\frac{b}{r} = \frac{2(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})}{3}.$$

Оба значения $\cos\gamma$ достигаются и определяются тем, находятся точки A и C по одну сторону от прямой BO или нет.

Ответ: $\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$

6. Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта А он встретит Василия, если пункт Б отстоит от пункта А на 4 км, а Василий доберётся до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

Решение: Обозначим через t_1 время от момента поломки до момента встречи и через t_2 время от момента встречи до окончания движения. Обозначим также через S_1 расстояние от места поломки до места встречи, через S_2 — расстояние от места встречи до пункта А, а через S — расстояние между А и Б (по условию $S = 4$). Тогда

$$\frac{S-S_2}{S_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Но, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, откуда, учитывая условие, получаем, что

$$\frac{S-S_2}{S_2} = \frac{S}{S_1+S_2} = 3.$$

Стало быть, искомое расстояние равно $S_2 = S/4 = 1$.

Ответ: 1 км

7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1:2$.

Решение: Пусть $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : k$ (по условию $k = 2$). Обозначим через d расстояние между AE и BD (по условию $d = \sqrt{13}$). Обозначим также через F и F' середины